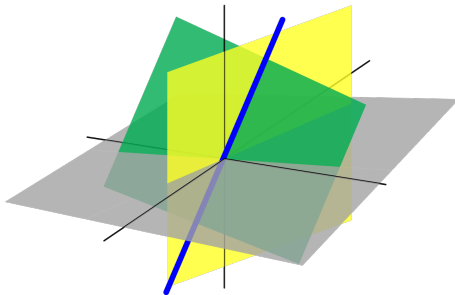


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 26 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



A.7 ARITHMÉTIQUE MODULAIRE

Comme pour $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ on peut considérer l'ensemble des nombres entiers $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

On regarde ces nombres comme tous les restes possibles de la division par n , ce qui nous permet de définir une somme et un produit en calculant dans $\mathbb{Z}$, mais en ne gardant que le reste de la division. Ainsi

- ❶ Dans $\{0, 1, 2\}$ on calcule $2 + 2 = 1$ car $4 = 1 \cdot 3 + 1$ reste de la division par 3
- ❷ Dans $\{0, 1, 2\}$ on calcule $2^3 = 8 = 2$ car $8 = 2 \cdot 3 + 2$
- ❸ Dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ on calcule $3 \cdot 4 = 2$
- ❹ Dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ on calcule $1 - 4 = 2$
- ❺ Dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11\}$ on calcule $10 \cdot 6 = 60 = 5 \cdot 12 = \underline{\underline{0}}$.

A.8 LE CORPS $\mathbb{F}_p$

PROPOSITION

Lorsque n n'est pas un nombre premier les opérations définies ci-dessus ne forment pas un corps.

Preuve. Comme n n'est pas premier, $n = a \cdot b$ pour $1 < a, b < n$. Ainsi le nouveau produit $a \cdot b$ est nul. Alors a ne peut pas avoir d'inverse car sinon $b = 1 \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0$. $\square$

THÉORÈME

Lorsque p est un nombre premier les opérations définies ci-dessus forment un corps $\mathbb{F}_p$.

Les seules propriétés qui ne découlent pas de celles de la somme et du produit dans $\mathbb{Z}$ sont l'existence d'opposé et d'inverse.

A.8 PREUVE

• opposé: Si $0 \leq k < p$, alors son opposé est $p-k$ car $k + (p-k) = p = 0$.
Si $k=0$, son opposé est 0.

• inverse: Soit $0 < k < p$, on doit trouver $0 < a < p$ tq $a \cdot k = 1$. On considère
$$\begin{array}{ccc} \phi: \{0, 1, \dots, p-1\} & \longrightarrow & \{0, 1, \dots, p-1\} \\ x & \longmapsto & x \cdot k \end{array}$$

On montre que ϕ est injective, ce qui montrera que ϕ est surjective: il existe a tq $\phi(a) = 1$.

Pour cela si $0 < x, y < p$, supposons que $\phi(x) = \phi(y)$ on doit prouver que $x=y$. On sait: $x \cdot k = y \cdot k$
 $(\Rightarrow) (x-y) \cdot k = 0$ ($\Rightarrow$ dans $\mathbb{Z}$ $(x-y) \cdot k$ est un multiple de p dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)
Mais $0 < k < p$, donc p divise $x-y$.
Comme à leur tour $0 < x, y < p$, $x=y$. $\square$

A.8 EXAMPLES

① Dann F_3 , $2^{-1} = 2$

② Dans $\mathbb{F}_5$, $2^{-1} = 3$ car $2 \cdot 3 = 6 = 1$

③ ~~Dans $\mathbb{F}_6$~~ , $2^{-1} =$ n'existe pas $2 \cdot 3 = 0$

④ Dans $\mathbb{F}_p$, $(p-1)^{-1} = (-1)^{-1} = -1 = \underline{\underline{p-1}}$
ou $(p-1)(p-1) = \underbrace{p^2 - 2p + 1}_{\text{multiple de } p} = 1$

Remarque: On va pouvoir former des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$ comme

$(\mathbb{F}_p)^n$, $\mathbb{F}_p[t]$ polynômes à coeff. dans $\mathbb{F}_p$
 $M_{2 \times 3}(\mathbb{F}_p)$

5.3.5 CRITÈRE DE DIAGONALISATION

En général, pour diagonaliser une matrice sur $\mathbb{R}$, il faut qu'il y ait assez de valeurs propres réelles **et** assez de vecteurs propres.

THÉORÈME

Une matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

- ❶ Le polynôme caractéristique est **scindé** sur $\mathbb{R}$: il se décompose en produit de facteurs $(\lambda - t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ❷ Pour tout λ , on a $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$.

Si A est diagonalisable on forme une base de vecteurs propres en réunissant les vecteurs de base de chaque espace propre.

5.3.5 EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. On constate sans faire de calculs :

① dans chaque ligne la somme des coefficients vaut $-3+2+2=1$.
Donc 1 est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre.

② $A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ rang 1, $\text{Ker}(A + 5I_2) =$
 $= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est de dim 2.

③ Donc $\dim E_1 = 1$, $\dim E_{-5} = 2$, et on trouve une
base de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

④ $C_A(t) = -(t-1)(t+5)^2$.

5.3.5 EXEMPLE, SUITE

Ainsi $A \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = D$

$$(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_{an}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \quad \text{et} \quad (Id)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}.$$

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = D = \begin{cases} P \cdot A \cdot P^{-1} \\ \bar{P}^{-1} \cdot A \cdot P \end{cases} \begin{matrix} \text{OK} \\ \text{OK} \end{matrix} \quad \text{et} \quad A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

$(P) = (Id)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{B}}$

$$\mathcal{B} \xleftarrow{P^{-1}} \mathcal{C}_{an} \xleftarrow{A} \mathcal{C}_{an} \xleftarrow{P} \mathcal{B}$$

5.3.6 DIAGONALISABILITÉ : MÉTHODE

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

- 1 Choisir une base $\mathcal{C}$ de V (la base canonique si elle existe).
- 2 Ecrire la matrice $A = (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T dans cette base.
- 3 Calculer le polynôme caractéristique $c_A(t)$.
- 4 Si $c_A(t)$ n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable.
- 5 Si $c_A(t)$ est scindé, extraire les racines λ de $c_A(t)$ et calculer les multiplicités algébriques.
- 6 Calculer les espaces propres E_λ et les multiplicités géométriques.
- 7 Si $\dim E_\lambda \neq \text{mult}(\lambda)$ pour une valeur propre λ , alors A n'est pas diagonalisable.
- 8 Si $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$ pour tout λ , alors A est diagonalisable.

5.3.7 DIAGONALISATION : MÉTHODE

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire diagonalisable.

- 1 Choisir une base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ pour toute valeur propre λ .
- 2 Réunir les $\mathcal{B}_\lambda$ pour former une base $\mathcal{B}$ de V .
- 3 $D = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale. Les valeurs propres apparaissent dans la diagonale dans l'ordre choisi pour construire la base $\mathcal{B}$.
- 4 Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés en coordonnées dans $\mathcal{C}$.
- 5 $D = P^{-1}AP$ et $A = PDP^{-1}$.

5.3.7 EXEMPLE : CHOIX D'UNE BASE POUR T

Soit W le plan de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$. On considère l'application linéaire $T : W \rightarrow W$ donnée par la formule

$$T \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9y + z \\ 3y - 8z \\ -12y + 7z \end{pmatrix} \quad \text{eW, la somme des coeff. = 0.}$$

- 1 On vérifie d'abord que $T\vec{w} \in W$ pour tout $\vec{w} \in W$.
- 2 On choisit ensuite une base $\mathcal{C}$ de W , par exemple

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

5.3.7 EXEMPLE : DIAGONALISATION DE T

On peut maintenant calculer la matrice A de T , par rapport à la base $\mathcal{C}$. Il faut toutefois calculer les images des vecteurs de base :

$$T(c_1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ \textcolor{red}{1} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{12}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \textcolor{red}{1} \end{pmatrix} = \frac{3}{5}c_1 - \frac{12}{5}c_2$$

$$T(c_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{8}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2$$

Par conséquent $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

5.3.7 EXEMPLE, SUITE

$$C_A(t) = \det \begin{pmatrix} 3/5 - t & -8/5 \\ -12/5 & 7/5 - t \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 3$$

$\stackrel{\text{Vale}}{=} (t-3)(t+1)$ siinde!

$$E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A .

$$A \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

⚠ On doit revenir au problème $T: W \rightarrow W$

5.3.7 EXEMPLE : UNE NOUVELLE BASE

La base de vecteurs propres choisie pour diagonaliser A est par exemple formée de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. A quelle base de W ces vecteurs correspondent-ils ? Ces vecteurs sont donnés en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ puisque A est la matrice de T par rapport à $\mathcal{C}$:

$$(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{C}} = (T(x))_{\mathcal{C}}$$

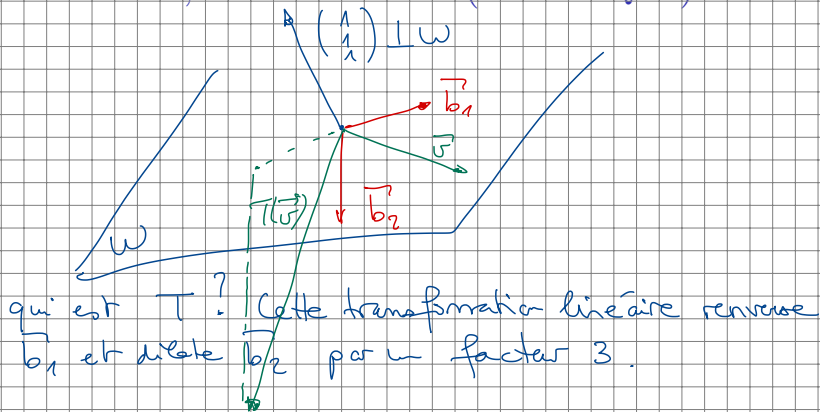
Par exemple $b_1 = c_1 + c_2$. Ainsi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (b_1)_{\mathcal{C}} \quad c_1 + c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La signification géométrique de T est maintenant transparente !

5.3.7 EXEMPLE, ILLUSTRATION (ARTISTIQUE)



5.4.1 LA TRACE

DÉFINITION

Soit A une matrice $n \times n$. La **trace** $\text{Tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors $\text{Tr}A = a + d$. Or

$$c_A(t) = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - (a+d)t + (ad-bc) = t^2 - \text{Tr}A \cdot t + \det A$$

Exemple 2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $\text{Tr}A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

$$\begin{aligned} c_A(t) &= (a_{11} - t)(a_{22} - t)(a_{33} - t) + \text{polynôme de degré 1} \\ &= -t^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 + \dots \end{aligned}$$

5.4.2 LA TRACE ET LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

PROPOSITION

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Alors $(-1)^{n-1} \text{Tr} A$ est le coefficient de t^{n-1} de $c_A(t)$ et $\det A$ est le coefficient constant.

Preuve. On a $c_A(0) = \det(A - 0 \cdot I_n) = \det A$. □

LEMME

Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

THÉORÈME

Si A est diagonalisable, alors la trace de A est égale à la somme des valeurs propres.

$$A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

5.4.2 LES PREUVES

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{Tr}(A \cdot B) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n (A \cdot B)_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{ji} \right) \stackrel{\text{comm. de.}}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} \cdot a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n (B \cdot A)_{jj} = \text{Tr}(BA) \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \text{Si } A \approx B, \text{ il existe } P \text{ inversible tq} \\ A = P \cdot B \cdot P^{-1} \text{ et donc } \text{Tr}(A) = \text{Tr}(P \cdot B \cdot P^{-1}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \text{Tr}(P^{-1} \cdot P \cdot B) = \text{Tr}(B) \end{aligned}$$

$$\text{Si } A \approx D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\text{Tr } A = \text{Tr } D = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad \square$$

Rappel: $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$

5.4.3 DEUX COMPLÉMENTS

THÉORÈME

Soit A une matrice carrée telle que $c_A(t)$ est scindé. Alors A est **triangularisable** (A est semblable à une matrice triangulaire).

Le théorème suivant affirme que le polynôme caractéristique “annule” la matrice A .

THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

Soit $c_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots a_1t + a_0$ le polynôme caractéristique de A . Alors

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots a_1A + a_0I_n = 0$$

*matrice
nulle*

5.4.3 EXEMPLE

$$\textcircled{1} \quad C_B(t) = t^2 - 5t + 2$$

$$\text{Alors} \quad B^2 - 5B + 2I_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{1}{2}(B^2 - 5B)}_{B^{-1}} = I_2$$

$$B \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{2}(B - 5I_2)\right]}_{B^{-1}} = I_2$$

$$\textcircled{2} \quad A \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow \text{Ker } A \neq \{\vec{0}\}$$

$$\Leftrightarrow 0 \text{ est valeur propre de } A$$

$$\Leftrightarrow C_A(0) = 0$$

$C_A(t)$ a coeff. constant nul

$$\Leftrightarrow t \mid C_A(t)$$

5.5.1 VALEURS PROPRES COMPLEXES

Soit A une matrice carrée de taille 2×2 à coefficients **réels**.

PROPOSITION

Soit $\lambda = a + bi$ une valeur propre complexe de A . Alors $\bar{\lambda} = a - bi$ est aussi valeur propre de A .

Preuve. $c_A(t) = (t - \lambda)(t - \mu) = t^2 - (\lambda + \mu)t + \lambda\mu$. Nous voulons montrer que μ est le conjugué complexe de $\lambda = a + bi$.

- ① $\lambda + \mu$ est un nombre réel $\Rightarrow \operatorname{Im}\mu = -b$ et $\mu = c - bi$
- ② $\lambda\mu = (a + bi)(c - bi)$ est un nombre réel $\Rightarrow bc - ab = 0$.

Donc $c = a$ et $\mu = a - bi$.



5.5.2 USAGE DES NOMBRES COMPLEXES

Soit A une matrice carrée de taille 2×2 à coefficients **réels**.

THÉORÈME

Si $\lambda = a + bi$ est valeur propre de A , alors $A \approx \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Observation. Soit $\vec{v}$ un vecteur propre pour la valeur propre complexe λ . Alors les parties réelles et imaginaires ($\operatorname{Re} \vec{v}, \operatorname{Im} \vec{v}$) forment une base de $\mathbb{R}^2$. Si elles étaient proportionnelles, toutes deux appartiendraient à E_λ , mais l'image d'un vecteur à coefficients réels est un vecteur à coefficients réels puisque A est à coefficients réels.

5.6.1 APPLICATION : CALCUL DE PUISSANCES

Soit A une matrice diagonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Mais alors on a aussi

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \quad \text{et} \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$